

Задача №1

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,2 млн. рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования?

Решение

1) Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют $1\,200\,000 : 24 = 50\,000$ (руб.). За 12 месяцев нужно выплатить 600 000 рублей (без процентов).

2) Подсчитаем, какую сумму составляют проценты за первые 12 месяцев.

$$\begin{aligned} & 1\,200\,000 \cdot 0,01 + 1\,150\,000 \cdot 0,01 + 1\,100\,000 \cdot 0,01 + \dots + 650\,000 \cdot 0,01 = \\ & = 0,01 \cdot (1\,200\,000 + 1\,150\,000 + 1\,100\,000 + \dots + 650\,000) = \\ & = \frac{1\,200\,000 + 650\,000}{2} \cdot 12 \cdot 0,01 = 11\,100\,000 \cdot 0,01 = 111\,000 \text{ (руб.)}. \end{aligned}$$

3) $600\,000 + 111\,000 = 711\,000$ (руб.) – сумма, которую нужно вернуть банку в течение первого года.

Ответ: 711 000 рублей

Задача №2

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 933 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования?

Решение

1) Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют X рублей.

Сумма кредита составляет $(24 \cdot X)$ рублей. За 12 месяцев нужно выплатить $(12 \cdot X)$ рублей (без процентов).

2) Пусть P – сумма, которую составляют проценты за первые 12 месяцев.

Составим и решим уравнение: $933\,000 = 12X + P$.

$$\begin{aligned} P &= (24X + 23X + \dots + 13X) \cdot 0,03 = \frac{24X + 13X}{2} \cdot 12 \cdot 0,03 = 37X \cdot 0,18 = 6,66X; \\ 933\,000 &= 12X + 6,66X; \\ 933\,000 &= 18,66X; \\ X &= 50\,000. \end{aligned}$$

Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют 50 000 рублей.

3) $50\,000 \cdot 12 = 600\,000$ (руб.) нужно вернуть банку в течение второго года (без процентов).

Подсчитаем, какую сумму составляют проценты за последние 12 месяцев.

$$(12X + 11X + \dots + X) \cdot 0,03 = \frac{12X + X}{2} \cdot 12 \cdot 0,03 = 13X \cdot 0,18 = 2,34X;$$

$$2,24 \cdot 50\,000 = 117\,000 \text{ (руб.)}$$

4) $600\,000 + 117\,000 = 717\,000$ (руб.) – сумма, которую нужно вернуть банку в течение второго года.

Ответ: 717 000 рублей

Задача №3

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 798,75 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования?

Решение

1) Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют X рублей. Сумма кредита составляет $(24 \cdot X)$ рублей. За 12 месяцев нужно выплатить $(12 \cdot X)$ рублей (без процентов).

2) Пусть P – сумма, которую составляют проценты за последние 12 месяцев.

Составим и решим уравнение: $798,75 = 12X + P$.

$$P = (12X + 11X + \dots + X) \cdot 0,01 = \frac{12X + X}{2} \cdot 12 \cdot 0,01 = (12X + X) \cdot 0,06 = 0,78X;$$

$$798\,750 = 12X + 0,78X; 798\,750 = 12,78X; X = 62\,500.$$

Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют 62 500 рублей.

3) $62\,500 \cdot 12 = 750\,000$ (руб.) нужно вернуть банку в течение первого года (без процентов).

Подсчитаем, какую сумму составляют проценты за первые 12 месяцев.

$$(24X + 23X + \dots + 13X) \cdot 0,01 = \frac{24X + 13X}{2} \cdot 12 \cdot 0,01 = 37,5 \cdot 6 \cdot 0,01 \cdot X = 2,25 \cdot 62\,500 = 138\,750 \text{ (руб.)}$$

4) $750\,000 + 138\,750 = 888\,750$ (руб.) – сумма, которую нужно вернуть банку в течение первого года.

Ответ: 888 750 рублей

Задача №4

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года (месяцев первых 12) кредитования нужно вернуть банку 1399,5 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение

1) Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют X рублей

Сумма кредита составляет $(24 \cdot X)$ рублей. За 12 месяцев нужно выплатить $(12 \cdot X)$ рублей (без %).

2) Пусть P – сумма, которую составляют проценты за первые 12 месяцев.

Составим и решим уравнение: $1\,399\,500 = 12X + P$.

$$P = (24X + 23X + \dots + 13X) \cdot 0,03 = \frac{24X + 13X}{2} \cdot 12 \cdot 0,03 = (24X + 13X) \cdot 0,18 = 6,66X;$$

$$1\,399\,500 = 12X + 6,66X;$$

$$1\,399\,500 = 18,66X;$$

$$X = 75\,000.$$

Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют 75 000 рублей.

3) $75\,000 \cdot 24 = 1\,800\,000$ (руб.) - сумма планируемого кредита.

Ответ: 1 800 000 рублей

Задача №5

15 января планируется взять в кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 1695 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение

1) Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют X рублей.

Сумма кредита составляет $(24 \cdot X)$ рублей. За 12 месяцев нужно выплатить $(12 \cdot X)$ рублей (без процентов).

2). Пусть P – сумма, которую составляют проценты за первые 12 месяцев.

Составим и решим уравнение: $1\,695\,000 = 12X + P$.

$$P = (12X + 11X + \dots + X) \cdot 0,02 = \frac{12X + X}{2} \cdot 12 \cdot 0,02 = 13X \cdot 0,12 = 1,56X;$$

$$1\,695\,000 = 12X + 1,56X;$$

$$1\,695\,000 = 13,56X;$$

$$X = 125\,000.$$

Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют 125 000 рублей.

3) $125\,000 \cdot 24 = 3\,000\,000$ (руб.) - сумма планируемого кредита.

Ответ: 3 000 000 рублей

Задача №6

15 января планируется взять в кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что на пятый месяц (со 2 по 14 июня) кредитования нужно выплатить банку 44 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку в течение всего срока кредитования?

Решение

1) Ежемесячные выплаты по кредиту (без процентов) составляют X рублей. Сумма кредита составляет $(9 \bullet X)$ рублей (без процентов).

2) Пусть p – сумма, которую составляют проценты на пятый месяц кредитования.

Составим и решим уравнение: $44\,000 = X + p$.

За пять месяцев сумма кредита составит $(5 \bullet X)$ руб.

На пятый месяц проценты составят $p = 5X \bullet 0,02 = 0,1X$ (руб.).

Тогда $44\,000 = X + 0,1X$; $44\,000 = 1,1X$;

$X = 40\,000$ (руб.) составляет сумма ежемесячных выплат (без процентов).

Сумма кредита составляет $40\,000 \bullet 9 = 360\,000$ (руб.).

3) Подсчитаем сумму, которую составляют проценты за весь период:

$$(9X + 8X + \dots + X) \bullet 0,02 = \frac{9X + X}{2} \bullet 9 \bullet 0,02 = 10X \bullet 0,09 = 0,9X;$$

$$0,9 \bullet 40\,000 = 36\,000 \text{ (руб.)}$$

4) $360\,000 + 36\,000 = 396\,000$ (руб.) - сумма, которую нужно выплатить банку в течение всего срока кредитования.

Ответ: 396 000 рублей

Задача №7

15 января планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

– 1-го января каждого года долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– выплата части долга происходит в январе каждого года после начисления процентов.

Если переводить в банк каждый год по 2 073 600 рублей, то кредит можно выплатить за 4 года.

Если переводить по 3 513 600 рублей, то за 2 года.

Найдите a .

Решение

$$\frac{2073600}{1+0,01a} + \frac{2073600}{(1+0,01a)^2} + \frac{2073600}{(1+0,01a)^3} + \frac{2073600}{(1+0,01a)^4} = \frac{3513600}{1+0,01a} + \frac{3513600}{(1+0,01a)^2}, \quad 1+0,01a \bullet 0.$$

$$20736 + \frac{20736}{1+0,01a} + \frac{20736}{(1+0,01a)^2} + \frac{20736}{(1+0,01a)^3} = 35136 + \frac{35136}{1+0,01a};$$

$$\frac{20736}{(1+0,01a)^3} + \frac{20736}{(1+0,01a)^2} - \frac{14400}{1+0,01a} - 14400 = 0. \text{ Пусть } 1+0,01a = x;$$

$$\frac{20736}{x^3} + \frac{20736}{x^2} - \frac{14400}{x} - 14400 = 0;$$

$$20736(1+x) - 14400x^2(1+x) = 0;$$

$$(1+x)(20736 - 14400x^2) = 0;$$

$$1+x = 0 \quad 20736 - 14400x^2 = 0; \quad x^2 = 1,44;$$

$$x = -1 \quad x_1 = -1,2, \quad x_2 = 1,2.$$

$$1) 1+0,01a = -1; \quad 2) 1+0,01a = -1,2; \quad 3) 1+0,01a = 1,2;$$

$0,01a = -2;$	$0,01a = -2,2;$	$0,01a = 0,2;$
$a = -2$ (не имеет смысла).	$a = -220$ (не имеет смысла).	$a = 20$

Ответ: 20%

Использована формула [2]: если вклад на X рублей полностью расходуется за n ежегодных выплат, равных $v_1, v_2, \dots, v_n$, осуществлённых после начисления p % по вкладу, то

$$X = \frac{v_1}{1+0,01p} + \frac{v_2}{(1+0,01p)^2} + \dots + \frac{v_n}{(1+0,01p)^n}.$$

Задача №8

15 июля взяли кредит в банке. Условия его возврата были таковы:

- 1-го января каждого года долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;
- выплата части долга происходит с февраля по июнь каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен двумя равными платежами по 4 548 600 рублей (то есть за два года). Какую сумму банк выдал в кредит?

Решение

$$X = \frac{4548600}{1+0,14} + \frac{4548600}{(1+0,14)^2} = \frac{4548600}{1,14} + \frac{4548600}{1,14^2} = 3\,990\,000 + 3\,500\,000 = 7\,490\,000 \text{ (руб.)}$$

– сумма, которую банк выдал в кредит.

Ответ: 7 490 000 рублей

Задача №9

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 6 902 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го января каждого года долг возрастает на 12,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

Какую сумму нужно возвращать банку ежегодно, чтобы выплатить долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение

$$X = \frac{v}{1,125} + \frac{v}{1,125^2} + \frac{v}{1,125^3} + \frac{v}{1,125^4}; \quad 6902000 = v \cdot \left(\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} + \frac{8^3}{9^3} + \frac{8^4}{9^4} \right);$$

$$6\,902\,000 = v \cdot \frac{5832 + 5184 + 4608 + 4096}{6561}; \quad 6\,902\,000 = v \cdot \frac{19720}{6561};$$

$$v = \frac{6902000 \cdot 6561}{19720} = 350 \cdot 6\,561 = 2\,296\,350 \text{ (руб.)} - \text{сумма, которую нужно возвращать банку ежегодно.}$$

Ответ; 2 296 350 рублей

Задача №10

15 января 2012 года банк выдал кредит на сумму 1 млн. рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го января каждого года долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- выплата части долга происходит в январе каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен за два года, и при этом в первый год была переведена сумма в 600 тыс. рублей, а во второй раз – 550 тыс. рублей.

Найдите a .

Решение

$$1\,000\,000 = \frac{600\,000}{1+0,01a} + \frac{550\,000}{(1+0,01a)^2}; \quad 20 = \frac{12}{1+0,01a} + \frac{11}{(1+0,01a)^2}; \quad 20(1+0,01a)^2 - 12(1+0,01a) - 11 = 0.$$

Введём новую переменную: $1+0,01a = x$ и решим уравнение $20x^2 - 12x - 11 = 0$. $D = 1024 = 32^2$.

$$x_1 = -0,5$$

$$x_2 = 1,1,$$

$$1). \quad 1+0,01a = -0,5;$$

$$2). \quad 1+0,01a = 1,1;$$

$$0,01a = -1,5;$$

$$0,01a = 1,1;$$

$$a = -150 \text{ (не имеет смысла).}$$

$$\underline{a = 10.}$$

Ответ: 10%

Список литературы

1. ЕГЭ-2016: Математика: 30 вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену: профильный уровень / под ред. И. В. Яценко. – Москва: АСТ: Астрель, 2016. – 135 с. – (Государственная итоговая аттестация).
2. Математика. ЕГЭ. 2015. Книга II. Профильный уровень / Д. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д. А.; М.: Народное образование, 2015. – 412 с.